19 04 2019

Γραμμικη II

$(E, <\cdot,\cdot>)$: Ευκλειδιος χώρος και $\dim_{\mathbb{R}} E = n$

Ενα σύνολο διανυσματων $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}\}$ καλειται

- Ορθογώνια βαση $\Leftrightarrow$ $\vec{e_i} \neq \vec{0}$, $i=1,\dots,n$ και $<\vec{e_i}, \vec{e_j}> = 0$, αν $1 \leq i \neq j$
  (Ανα δύο κάθετοι και μηδενικοί)
- Ορθοκανονικη βαση $\Leftrightarrow$ $<\vec{e_i}, \vec{e_j}> = \begin{cases} 1, & \text{αν } i=j \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$, $1 \leq i, j \leq n$

[Χρησιμοποιήσαμε ότι κάθε ορθογώνιο σύνολο μη μηδενικών διανυσμάτων του E είναι ΓΑ]

Προβλημα

Εχει καθε ευκλειδιος χωρος τουλαχιστον μια ορθοκανονικη βαση; (Ορθοκανονική Βαση: OKB)

Εστω $\vec{x}, \vec{y} \in E$ και $\vec{y} \neq \vec{0}$. Η ορθογωνια προβολη του $\vec{x}$ στο $\vec{y}$ οριζεται να είναι το διανυσμα $\Pi_{\vec{y}}(\vec{x}) = \frac{<\vec{x}, \vec{y}>}{<\vec{y}, \vec{y}>}\vec{y}$ και τοτε: $\vec{x} - \Pi_{\vec{y}}(\vec{x}) \perp \vec{y}$, διοτι:

$\longrightarrow$ κάθετα διανύσματα δηλ. εσωτερικό γινόμενο ίσο με 0

$$< \vec{x} - \Pi_{\vec{y}}(\vec{x}), \vec{y} > = <\vec{x}, \vec{y}> - <\Pi_{\vec{y}}(\vec{x}), \vec{y}> = <\vec{x}, \vec{y}> - < \frac{<\vec{x}, \vec{y}>}{<\vec{y}, \vec{y}>}\vec{y}, \vec{y} > =$$

$$= <\vec{x}, \vec{y}> - \frac{<\vec{x}, \vec{y}>}{\cancel{<\vec{y}, \vec{y}>}}\cancel{<\vec{y}, \vec{y}>} = <\vec{x}, \vec{y}> - <\vec{x}, \vec{y}> = 0$$

Διαδικασια Gram-Schmidt

Εστω $\{\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots, \vec{x_n}\}$: ΓΑ σύνολο διανυσματων του E.
Θα κατασκευάσουμε ένα ορθογώνιο σύνολο $\{\vec{y_1}, \vec{y_2}, \dots, \vec{y_n}\}$ αποτελούμενο από μη-μηδενικα διανύσματα.

- Θετουμε $\boxed{\vec{y_1} = \vec{x_1}}$ $\vec{y_1} \neq \vec{0}$
- Θετουμε $\boxed{\vec{y_2} = \vec{x_2} - \Pi_{\vec{y_1}}(\vec{x_2}) = x_2 - \frac{<\vec{x_2}, \vec{y_1}>}{<\vec{y_1}, \vec{y_1}>}\vec{y_1}}$

Τοτε οπως ειδαμε $\vec{y_2} \perp \vec{y_1}$, και το $\vec{y_2}$ οριζεται διοτι $\vec{y_1} = \vec{x_1} \neq \vec{0}$
Επιπλεον, $\vec{y_2} \neq 0$ διοτι αν $\vec{y_2} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x_2} = \frac{<\vec{x_2}, \vec{y_1}>}{<\vec{y_1}, \vec{y_1}>}\vec{y_1} = \frac{<x_2, y_1>}{<\vec{y_1}, \vec{y_2}>}\vec{x_1}$
$\Rightarrow \{\vec{x_1}, \vec{x_2}\}$ ΓΕ άτοπο

<u>ατοπο</u>
διοτι $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ ΓΑ ως υποσυνολο των ΓΑ $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$

• Θετουμε $\vec{y}_3 = \vec{x}_3 - \Pi_{(\vec{y}_1)}(\vec{x}_3) - \Pi_{(\vec{y}_2)}(\vec{x}_3) =$

$$= \vec{x}_3 - \frac{\langle \vec{x}_3, \vec{y}_1 \rangle}{\langle \vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle}\vec{y}_1 - \frac{\langle \vec{x}_3, \vec{y}_2 \rangle}{\langle \vec{y}_2, \vec{y}_2 \rangle}\vec{y}_2 \Rightarrow \boxed{\vec{y}_3 = \vec{x}_3 - \frac{\langle \vec{x}_3, \vec{y}_1 \rangle}{\langle \vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle}\vec{y}_1 - \frac{\langle \vec{x}_3, \vec{y}_2 \rangle}{\langle \vec{y}_2, \vec{y}_2 \rangle}\vec{y}_2}$$

$$\rightarrow \langle \vec{y}_3, \vec{y}_1 \rangle = \langle \vec{x}_3 - \frac{\langle \vec{x}_3, \vec{y}_1 \rangle}{\langle \vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle}\vec{y}_1 - \frac{\langle \vec{x}_3, \vec{y}_2 \rangle}{\langle \vec{y}_2, \vec{y}_2 \rangle}\vec{y}_2, \vec{y}_1 \rangle =$$

$$= \langle \vec{x}_3, \vec{y}_1 \rangle - \frac{\langle \vec{x}_3, \vec{y}_1 \rangle}{\cancel{\langle \vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle}}\cancel{\langle \vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle} - \frac{\langle \vec{x}_3, \vec{y}_2 \rangle}{\langle \vec{y}_2, \vec{y}_2 \rangle}\cancelto{0}{\langle \vec{y}_2, \vec{y}_1 \rangle} =$$

$= \langle \vec{x}_3, \vec{y}_1 \rangle - \langle \vec{x}_3, \vec{y}_1 \rangle = 0$, διοτι $\vec{y}_1 \perp \vec{y}_2$ από προηγ. βημα

$$\rightarrow \langle y_3, y_2 \rangle = \langle \vec{x}_3 - \frac{\langle \vec{x}_3, \vec{y}_1 \rangle}{\langle \vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle}\vec{y}_1 - \frac{\langle \vec{x}_3, \vec{y}_2 \rangle}{\langle \vec{y}_2, \vec{y}_2 \rangle}\vec{y}_2, \vec{y}_2 \rangle =$$

$$= \langle \vec{x}_3, \vec{y}_2 \rangle - \frac{\langle \vec{x}_3, \vec{y}_1 \rangle}{\langle \vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle}\underbrace{\cancelto{0}{\langle \vec{y}_1, \vec{y}_2 \rangle}}_{\text{διότι } \vec{y}_1 \perp \vec{y}_2} - \frac{\langle \vec{x}_3, \vec{y}_2 \rangle}{\cancel{\langle \vec{y}_2, \vec{y}_2 \rangle}}\cancel{\langle \vec{y}_2, \vec{y}_2 \rangle} =$$

$= \langle \vec{x}_3, \vec{y}_2 \rangle - \langle \vec{x}_3, \vec{y}_2 \rangle = 0$

Αρα $\vec{y}_3 \perp \vec{y}_1$ και $\vec{y}_3 \perp \vec{y}_2$ και επομενως το συνολο $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3\}$ είναι ορθογωνιο

Αν $\vec{y}_3 = \vec{0} \Rightarrow \vec{x}_3 = \frac{\langle \vec{y}_3, \vec{y}_1 \rangle}{\langle \vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle}\vec{y}_1 - \frac{\langle \vec{x}_3, \vec{y}_2 \rangle}{\langle \vec{y}_2, \vec{y}_2 \rangle}\vec{y}_2 \Rightarrow \vec{x}_3$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\vec{y}_1 = \vec{x}_1$ και $\vec{y}_2$. Όμως η $\vec{y}_2$ είναι γ.σ. των $\vec{x}_1$ και $\vec{x}_2 \Rightarrow \vec{x}_3$ γ.σ των $\vec{x}_1, \vec{x}_2$: <u>ατοπο</u> διότι, $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ είναι ΓΑ ως υποσύνολο του ΓΑ $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$

• <u>Επαγωγική Υπόθεση</u>: Εχαμε κατασκευάσει το ορθογωνιο σύνολο μη μηδενικών διανυσμάτων $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_{k-1}\}$, ως εξής
$\forall i = 1, 2, \dots, k-1$: $\vec{y}_i = \vec{x}_i - \Pi_{\vec{y}_1}(\vec{x}_i) - \Pi_{\vec{y}_2}(\vec{x}_i) - \dots - \Pi_{\vec{y}_{i-1}}(\vec{x}_i)$

Γενική Περίπτωση

$$\boxed{\text{Θέτουμε } \vec{y}_k = \vec{x}_k - \Pi_{\vec{y}_1}(\vec{x}_k) - \Pi_{\vec{y}_2}(\vec{x}_k) - \dots - \Pi_{\vec{y}_{k-1}}(\vec{x}_k)}$$

και τότε $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$: ορθογώνιο και αποτελείται από μη-μηδενικά διανύσματα δηλαδή $\vec{y}_k \perp \vec{y}_i$, $1 \le i \le k-1$ και $\vec{y}_k \neq \vec{0}$

Απόδειξη

$\langle \vec{x}_k, \vec{y}_1 \rangle = \langle \vec{x}_1 - \Pi_{\vec{y}_1}(\vec{x}_k) - \Pi_{\vec{y}_2}(\vec{x}_k) - \dots - \Pi_{\vec{y}_{k-1}}(\vec{x}_k), \vec{y}_1 \rangle =$

$= \langle \vec{x}_k, \vec{y}_1 \rangle - \dfrac{\langle \vec{x}_k, \vec{y}_1 \rangle}{\cancel{\langle \vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle}} \cancel{\langle \vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle} - \dfrac{\langle \vec{x}_k, \vec{y}_2 \rangle}{\langle \vec{y}_2, \vec{y}_2 \rangle} \cancel{\langle \vec{y}_2, \vec{y}_1 \rangle}^{0} - \dots - \dfrac{\langle \vec{x}_k, \vec{y}_{k-1} \rangle}{\langle \vec{y}_{k-1}, \vec{y}_{k-1} \rangle} \cancel{\langle \vec{y}_{k-1}, \vec{y}_1 \rangle}^{0}$

$= \langle \vec{x}_k, \vec{y}_1 \rangle - \langle \vec{x}_k, \vec{y}_1 \rangle = 0 \Rightarrow \vec{y}_k \perp \vec{y}_1$

Παρόμοια βλέπουμε ότι $\vec{y}_k \perp \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_k \perp \vec{y}_{k-1}$

Επιπλέον $\vec{y}_k \neq \vec{0}$, διότι αν $\vec{y}_k = \vec{0}$, τότε: $\vec{x}_k = \Pi_{\vec{y}_1}(\vec{x}_k) + \dots + \Pi_{\vec{y}_{k-1}}(\vec{x}_k)$

Όμως $\vec{y}_1 = \vec{x}_1$

$\vec{y}_2$: Γ.Σ. των $\vec{x}_1, \vec{x}_2$

$\vec{y}_3$: ΓΣ των $\vec{x}_1, \vec{x}_3, \vec{x}_3$

$\vdots$

$\vec{y}_{k-1}$ ΓΣ των $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{k-1}$

και τότε το $\vec{x}_k$ είναι ΓΣ των $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{k-1} \Rightarrow \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k\}$ ΓΕ

και αυτό είναι <u>άτοπο</u> διότι το $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k\} \subseteq \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}$: ΓΑ

Άρα από κάθε ΓΑ σύνολο $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ του Ευκλείδειου χώρου $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ η διαδικασία Gram-Schmidt παράγει ένα ορθογώνιο σύνολο $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n\}$ το οποίο αποτελείται από μη-μηδενικά διανύσματα όπου: $\forall k = 1, 2, \dots, n : y_k =$

$$\boxed{\vec{y}_k = \vec{y}_k - \Pi_{\vec{y}_1}(\vec{x}_k) - \Pi_{\vec{y}_2}(\vec{x}_k) - \dots - \Pi_{\vec{y}_{k-1}}(\vec{x}_k)} \quad (*)$$

και τότε το $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n\}$ είναι ΓΑ

Έστω $\vec{z_i} = \frac{\vec{y_i}}{\|\vec{y_i}\|}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Τότε το σύνολο $\{\vec{z_1}, \vec{z_2}, \ldots, \vec{z_n}\}$ ορθοκανονικό σύνολο διανυσμάτων.

Θεώρημα

Κάθε ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης $(E, \langle , \rangle)$ έχει τουλάχιστον μία ορθοκανονική βάση

Απόδειξη

Γνωρίζουμε ότι κάθε $\mathbb{R}$-δχ E έχει μια βάση $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n}\}$
Από την εφαρμογή της διαδικασίας Gram-Schmidt στο σύνολο B προκύπτει ένα ορθοκανονικό σύνολο διανυσμάτων:
$G = \{\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}, \ldots, \vec{\varepsilon_n}\}$. Το G είναι ορθογώνιο, αποτελείται από μη μηδενικά διανύσματα, άρα είναι ΓΑ, και άρα είναι βάση επειδή $\dim_{\mathbb{R}} E = |G| = n$, και άρα G: ΟΚΒ

Πόρισμα

Κάθε υπόχωρος ενός Ευκλείδειου χώρου $(E, \langle , \rangle)$ πεπερασμένης διάστασης, είναι Ευκλείδειος και άρα έχει ΟΚΒ

Παράδειγμα 1

$\vec{x_1} = (1, 2, 3)$, $\vec{x_2} = (1, 0, -1)$, $\vec{x_3} = (0, 1, 3) \in \mathbb{R}^3$

ελέγχω αν είναι ΓΑ:

Εύκολα βλέπουμε ότι τα $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}$ είναι ΓΑ και άρα είναι μια βάση του $\mathbb{R}^3$

Η βάση $\{x_1, x_2, x_3\}$ δεν είναι ΟΚΒ, διότι για παράδειγμα

$\langle \vec{x_1}, \vec{x_2} \rangle = \langle (1,2,3), (1,0,-1) \rangle = 1 - 3 = -2 \neq 0$

Διαδικασία Gram-Schmidt:

- $\vec{y_1} = \vec{x_1}$
- $\vec{y_2} = \vec{x_2} - \Pi_{\vec{y_1}}(\vec{x_2}) = (1, 0, -1) - \frac{\langle \vec{x_2}, \vec{y_1} \rangle}{\langle \vec{y_1}, \vec{y_1} \rangle} \vec{y_1} = (1, 0, -1) - \frac{\langle (1,0,-1), (1,2,3) \rangle}{\langle (1,2,3), (1,2,3) \rangle} \vec{y_1}$

$= (1,0,-1) - \frac{-2}{14}(1,2,3) = \left(\frac{8}{7}, \frac{2}{7}, \frac{-4}{7}\right)$

• $\vec{y}_3 = \vec{x}_3 - \Pi_{y_1}(\vec{y}_3) - \Pi_{y_2}(\vec{y}_2) = (0,1,3) - \frac{\langle \vec{x}_3, \vec{y}_1 \rangle}{\langle \vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle}\vec{y}_1 - \frac{\langle \vec{x}_3, \vec{y}_2 \rangle}{\langle \vec{y}_2, \vec{y}_2 \rangle}\vec{y}_2 =$

$= (0,1,3) - \frac{\langle (0,1,3)(1,2,3) \rangle}{\langle (1,2,3),(1,2,3) \rangle}(1,2,3) - \frac{\langle (0,1,3), \left(\frac{8}{7}, \frac{2}{7}, -\frac{4}{7}\right) \rangle}{\langle \left(\frac{8}{7}, \frac{2}{7}, \frac{-4}{7}\right), \left(\frac{8}{7}, \frac{2}{8}, -\frac{4}{8}\right) \rangle}\left(\frac{8}{7}, \frac{2}{7}, \frac{-4}{7}\right)$

$= \dots = \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$

Το σύνολο $\left\{\frac{\vec{y}_1}{\|\vec{y}_1\|}, \frac{\vec{y}_2}{\|\vec{y}_2\|}, \frac{\vec{y}_3}{\|\vec{y}_3\|}\right\}$: ΟΚΒ του $\mathbb{R}^3$

$\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)$, $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{12}}\left(\frac{8}{7}, \frac{2}{7}, \frac{-4}{7}\right)$, $= \sqrt{6}\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$

$\|\vec{y}_1\| = \langle \vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle = \langle (1,2,3)(1,2,3) \rangle = 14$

Παράδειγμα 2 : $\boxed{\text{Η κανονική βάση του } \mathbb{R}^n \ B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\} \text{ είναι ΟΚΒ όπου } e_i = (0,\dots,0,1,0,\dots,0),\ 1 \le i \le n \text{ (i θέση)}}$

Παράδειγμα 3 : Στον Ευκλείδειο χώρο $(\mathbb{R}_2[t], \langle\cdot,\cdot\rangle)$, όπου $\langle P(t), Q(t) \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$, η κανονική βάση $B = \{1, t, t^2\}$ δεν είναι ΟΚΒ

(Εφαρμόζω Gram-Schmidt στο $B = \{1, t, t^2\}$)

• Θέτουμε $R_1(t) = 1$

• Θέτουμε $R_2(t) = t - \frac{\langle t, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle}\cdot 1 = t - \frac{\int_0^1 t\,dt}{\int_0^1 1\,dt}1 = t - \frac{\frac{1}{2}}{1}1 = t - \frac{1}{2}$

• Θέτουμε $R_3(t) = t^2 - \frac{\langle t^2, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle}1 - \frac{\langle t^2, t - \frac{1}{2} \rangle}{\langle t - \frac{1}{2}, t - \frac{1}{2} \rangle}\left(t - \frac{1}{2}\right) =$

$t^2 - \frac{\int_0^1 t^2\,dt}{\int_0^1 1\,dt}1 - \frac{\int_0^1 t^2\left(t - \frac{1}{2}\right)dt}{\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2}\left(t - \frac{1}{2}\right) = \dots = t^2 - t + \frac{1}{6}$

$\Rightarrow \left\{1, t - \frac{1}{2}, t - t + \frac{1}{6}\right\}$ είναι ορθογώνια βάση του $R_2[t]$, και τέλος το σύνολο $\left\{\frac{1}{\|1\|}, \frac{t - \frac{1}{2}}{\|t - \frac{1}{2}\|}, \frac{t^2 - t + \frac{1}{6}}{\|t^2 - t + \frac{1}{6}\|}\right\}$ ΟΚΒ του $\mathbb{R}_2[t]$

$\frac{1}{\|1\|} = 1$, $\frac{t-\frac{1}{2}}{\|t-\frac{1}{2}\|} = \sqrt{12}\left(t-\frac{1}{2}\right)$

Αυτά τα 3 διανύσματα
μια ορθοκανονική βάση

$\frac{t^2-t+\frac{1}{6}}{\|t^2-t+\frac{1}{6}\|} = \sqrt{180}\left(t^2-t+\frac{1}{6}\right)$

Γιατί χρησιμοποιούμε ορθοκανονικές βάσεις;

Έστω $(E, \langle . \rangle)$ ένας Ευκλείδιος χώρος πεπερασμένης διάστα

Έστω $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, .., \vec{e_n}\}$ ΟΚΒ του E, δηλαδή:

$$\langle \vec{e_i}, \vec{e_j} \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } i=j \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases}, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

Έστω $\vec{x} \in E$. Τότε γνωρίζουμε ότι το $\vec{x}$ γράφεται μοναδικά ω

$\vec{x} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + .. + x_n\vec{e_n}$. Τότε $\langle \vec{x}, \vec{e_i} \rangle = \langle x_1\vec{e_1} + .. + x_n\vec{e_n}, \vec{e_i} \rangle =$

$= x_i \cancel{\langle \vec{e_1}, \vec{e_i} \rangle}^{0} + .. + x_i \cancel{\langle \vec{e_i}, \vec{e_i} \rangle}^{1} + \dots + x_n \cancel{\langle \vec{e_n}, \vec{e_i} \rangle}^{0} = x_i$ Άρα:

$$\boxed{\vec{x} = \langle x, \vec{e_1} \rangle \vec{e_1} + \langle x, \vec{e_2} \rangle \vec{e_2} + .. + \langle x, \vec{e_n} \rangle \vec{e_n}}$$

Επειδή $\langle \vec{x}, \vec{e_i} \rangle = \|\vec{x}\| \, \|\vec{e_i}\| \cdot \cos(\theta_i)$, όπου $\theta_i = \measuredangle(\vec{x}, \vec{e_i})$, $1 \leq i \leq n$

$= \|\vec{x}\| \cos(\theta_i)$ Άρα ο τύπος μπορεί να γραφεί:

$\vec{x} = \|\vec{x}\| \cos(\theta_1)\vec{e_1} + \dots + \|\vec{x}\| \cos\theta_n)\vec{e_n} = \|\vec{x}\| \left(\cos(\theta_1)\vec{e_1} + .. + \cos(\theta_n)\vec{e_n}\right)$

Αν $\left.\begin{array}{l} \vec{x} = x_1\vec{e_1} + \dots + x_n\vec{e_n} \\ \vec{y} = y_1\vec{e_1} + .. + y_n\vec{e_n} \end{array}\right| \Rightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle x_1\vec{e_1} + .. + x_n\vec{e_n}, y_1\vec{e_1} + .. + y_n\vec{e_n} \rangle =$

$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \langle \vec{e_i}, \vec{e_j} \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_i \delta_{ij} = x_1y_1 + .. + x_ny_n$

$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + .. + x_n^2}$

Έστω $(E, <,>)$ ένας Ευκλείδειος χώρος, πεπερασμένης διάστασης.
$V \subseteq E$ υπόχωρος. Το υποσύνολο:

$$V^{\perp} = \{\vec{x} \in E \mid \langle \vec{x}, \vec{v} \rangle = 0, \ \forall \vec{v} \in V\}$$

καλείται ο <u>ορθογώνιος υπόχωρος</u> του V ή το <u>ορθογώνιο συμπλήρωμα</u> του V

Το υποσύνολο $V^{\perp}$ είναι υπόχωρος του E, διότι:

- $\vec{0} \in V$, διότι $\langle \vec{0}, \vec{v} \rangle = 0, \ \forall \vec{v} \in V$
- Αν $\vec{x}, \vec{y} \in V^{\perp}$, τότε $\langle \vec{x}+\vec{y}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{v} \rangle = 0+0=0 \ \forall \vec{v} \in V$
- Αν $\vec{x} \in V^{\perp}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε $\langle \lambda \vec{x}, \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{x}, \vec{v} \rangle = \lambda\, 0 = 0 \ \forall \vec{v} \in V$

<u>Λήμμα</u>
Έστω $B = \{\vec{e}_1, .., \vec{e}_r\}$: ΟΚΒ του V : E. Τότε
$\forall \vec{x} \in E \ \ \vec{x} \in V^{\perp} \Leftrightarrow \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle = 0, \ \forall i = 1, .., r$

<u>Απόδειξη</u>
"$\Rightarrow$" : Αν $\vec{x} \in V^{\perp}$, τότε $\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle = 0, \ \forall \vec{v} \in V \Rightarrow \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle = 0$
$\forall i = 1, .., r$
"$\Leftarrow$" : Έστω ότι $\langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle = 0, \ \forall i = 1, .., r$. Έστω $\vec{v} \in V \Rightarrow$
$\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + .. + v_r \vec{e}_r$ για κάποιους $v_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq r$. Τότε
$\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{x}, v_1 \vec{e}_1 + .. + v_r \vec{e}_r \rangle = v_1 \cancel{\langle \vec{x}, \vec{e}_1 \rangle}^{0} + .. + v_r \cancel{\langle \vec{x}, \vec{e}_r \rangle}^{0} = 0 \ \ \forall \vec{v} \in V$

Άρα $\vec{x} \in V^{\perp}$

Θεώρημα

Για κάθε <u>υπόχωρο V</u> του E: $\boxed{E = V \oplus V^{\perp}}$ $\begin{cases} E = V + V^{\perp} \\ V \cap V^{\perp} = \{\vec{0}\} \end{cases}$

Απόδειξη

Έστω $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_r\}$ ΟΚΒ του V

Έστω $\vec{x} \in E$. Ζητάμε ένα διάνυσμα $\vec{y} \in V : \vec{x} - \vec{y} \in V^{\perp}$

Τότε $\langle \vec{x} - \vec{y}, \vec{v} \rangle = 0, \ \forall \vec{v} \in V \xLeftrightarrow{\text{Λήμμα}} \langle \vec{x} - \vec{y}, \vec{e}_i \rangle = 0, \ \forall i = 1, 2, \ldots, r$

$\Leftrightarrow \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle = \langle \vec{y}, \vec{e}_i \rangle, \ \forall i = 1, 2, \ldots, r$

Θέτουμε $y = \langle \vec{x}, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 + \ldots + \langle \vec{x}, \vec{e}_r \rangle \vec{e}_r$ και τότε $\vec{y} \in V$ και $\vec{x} - \vec{y} \in V^{\perp}$

Άρα $\vec{x} - \vec{y} = \vec{z} \in V$ και τότε $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, όπου $\vec{y} \in V$, $\vec{z} \in V^{\perp}$ $\Rightarrow$

$E = V + V^{\perp}$. Αν $\vec{x} \in V \cap V^{\perp} \Rightarrow \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow$

$V \cap V^{\perp} = \{\vec{0}\}$. Άρα $E = V \oplus V^{\perp}$

Πόρισμα

Έστω V: υπόχωρος του E. Τότε

1) $\dim_{\mathbb{R}} V^{\perp} = \dim_{\mathbb{R}} E - \dim_{\mathbb{R}} V$

2) Αν $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_r\}$: ορθοκανονικό σύνολο διανυσμάτων του E, τότε υπάρχουν διανύσματα $\vec{e}_{r+1}, \ldots, \vec{e}_n \in E$: $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_r, \vec{e}_{r+1}, \ldots, \vec{e}_n\}$ ΟΚΒ του E

Απόδειξη

1) Επειδή $E = V \oplus V^{\perp}$, έπεται ότι $\dim_{\mathbb{R}} E = \dim_{\mathbb{R}} V + \dim_{\mathbb{R}} V^{\perp} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} V^{\perp} = \dim_{\mathbb{R}} E - \dim_{\mathbb{R}} V$

2) Θέταμε $V =$ ο υπόχωρος του E ο οποίος παράγεται από το $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_r\}$ και τότε $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_r\}$: ΟΚΒ του V

Έστω $\{\vec{e}_{r+1}, \dots, \vec{e}_n\}$: ΟΚΒ του $V^{\perp}$

και τότε $\{\underbrace{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_r}_{\text{ορθογώνια μήκους } 1}, \underbrace{\vec{e}_{r+1}, \dots, \vec{e}_n}_{\text{ορθογώνια μήκους } 1}\}$: ΟΚΒ του E η οποία

συμπληρώνει το ορθοκανονικό σύνολο $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_r\}$.